

9. Lösung von linearen Gleichungen



Hochschule Amberg-Weiden
für angewandte Wissenschaften
University of Applied Sciences (FH)

9.1 Lineare Gleichungen

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit Gleichungen, die entweder direkt in der Form

$$ax + b = 0$$

vorliegen oder durch zulässige Operationen in diese Form zu überführen sind.

Hierbei handelt es sich um eine lineare Gleichung oder Gleichung ersten Grades, wobei $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ gilt

Zulässige Gleichungsoperationen oder äquivalente Umformung

Jede auf eine Gleichung angewendete Operation muss auf beiden Seiten der Gleichung solange angewendet werden, bis die Variable auf einer Seite isoliert ist. Äquivalente Gleichungen erhält man, wenn zu bzw. von beiden Seiten derselbe Wert addiert bzw. subtrahiert, eine Gleichung mit demselben Wert $\neq 0$ multipliziert bzw. dividiert wird.

Beispielaufgabe:

$$\begin{aligned} 3y + 12 &= 66 && | -12 \\ \rightarrow 3y &= 66 - 12 \\ \rightarrow 3y &= 54 && |: 3 \\ \rightarrow y &= 18 \end{aligned}$$

Beispielaufgabe:

$$\begin{aligned} 3x - 2 &= -2x + 8 && | +2x \quad | +2 \\ \rightarrow 3x + 2x &= 8 + 2 \\ \rightarrow 5x &= 10 && |: 5 \\ \rightarrow x &= \frac{10}{5} = 2 \end{aligned}$$

Die Gleichung $ax + b = 0$ ist lösbar, wobei die Gleichung entweder eine oder mehrere Lösungen haben kann.

Beispielaufgabe mit mehreren Lösungen:

$$4 \cdot (2x - 1) = 2 + 8 \cdot \left(-\frac{6}{8} + x\right) \quad | \text{ Klammern auflösen}$$

$$\rightarrow 8x - 4 = 2 - 6 + 8x$$

$$\rightarrow 8x - 4 = -4 + 8x$$

$$\rightarrow \mathbf{0 = 0}$$

Diese Gleichung gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ (es handelt sich um eine Identitätsgleichung)

Ergibt die Auflösung allerdings einen Widerspruch, ergibt sich keine Lösung. Die Lösungsversuche einer widersprüchlichen Gleichung scheitern daran, dass sich zwar ebenfalls die Variablen gegenseitig aufheben, die beiden Seiten der Gleichung letztlich aber unterschiedliche Werte annehmen

Beispielaufgabe einer widersprüchlichen Gleichung:

$$\begin{aligned} 2(x + 2) - 7 &= 2x + 3 \\ \rightarrow 2x + 4 - 7 &= 2x + 3 \\ \rightarrow 2x - 3 &= 2x + 3 \\ \rightarrow -3 &= 3 \end{aligned}$$

| Klammern auflösen

| $-2x$

Widerspruch da $-3 \neq 3$

Schritte zur Lösung einer linearen Gleichung:

Schritt 1:

Lösen Sie auf beiden Seiten Klammern und Brüche auf und fassen Sie jeweils gleichartige Glieder zusammen:

Beispiel:

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}x + 4\right) = (5 + 7) \cdot 3 + 3x$$
$$x + 8 = 36 + 3x$$

Schritt 2:

Addieren/Subtrahieren Sie so, dass alle Variablen auf der linken Seite und alle absoluten Werte auf der rechten Seite (oder umgekehrt) stehen und zusammengefasst werden können:

Beispiel:

$$x + 8 = 36 + 3x$$

$$x - 3x = 36 - 8$$

$$-2x = 28$$

$$| -3x \quad | -8$$

Schritt 3:

Multiplizieren/Dividieren Sie so, dass die Variable isoliert wird. Falls sich hierbei $0 = 0$ ergibt, ist die Gleichung eine Identitätsgleichung, die für alle Werte $x \in \mathbb{R}$ gilt. Falls die linke von der rechten Seite verschieden ist, dann ist die ursprüngliche Gleichung widersprüchlich und damit ohne Lösung:

Beispiel:

$$-2x = 28$$

$$| : (-2)$$

$$x = \frac{28}{-2}$$

$$x = -14$$

Schritt 4:

Zur Probe kann das Ergebnis in die Ausgangsgleichung eingesetzt werden:

Beispiel:

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (-14) + 4 \right) = (5 + 7) \cdot 3 + 3 \cdot (-14)$$

$$-6 = -6$$

Wahre Aussage; $\mathbb{L} = \{-14\}$

Lösungsmenge:

Die Menge aller Lösungen einer Gleichung wird in der folgenden Form angegeben:

$$\rightarrow \mathbb{L} = \{ \dots \}$$